模块六 复合函数综合

第 1 节 复合函数方程问题（★★★★）

内容提要

含有 $f(f(x))$，$f(g(x))$ 这类结构的方程称为复合函数方程，复合函数方程问题一般用换元法来求解，可设内层的函数为 t，将一个双层的方程问题化归成两个单层的方程问题来处理. 由于复合函数方程相关模拟题颇难，所以本节整体难度较高.

典型例题

类型Ⅰ：不含参的复合函数方程问题

【例 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x,x\le 1\\ \ln(x-1),x>1\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(f(x))-2$ 的零点个数为（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

解析：在零点问题中，看到复合函数结构 $f(f(x))$，一般会将内层换元成 t，先解 t，再解 x，

由题意，$g(x)=0\Leftrightarrow f(f(x))=2$，设 $t=f(x)$，则 $f(t)=2$，

可观察直线 $y=2$ 与 $y=f(t)$ 图象的交点来求解此方程，

如图 1，$f(t)=2$ 的解是 $t=-1$ 或 e^2+1，求出了 t，代回 $t=f(x)$，所以 $-1=f(x)$ 或 $e^2+1=f(x)$，

如图 2，$g(x)$ 的零点个数即为直线 $y=-1$ 和 $y=e^2+1$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点个数，

由图可知交点个数为 3，故选 C.

答案：C

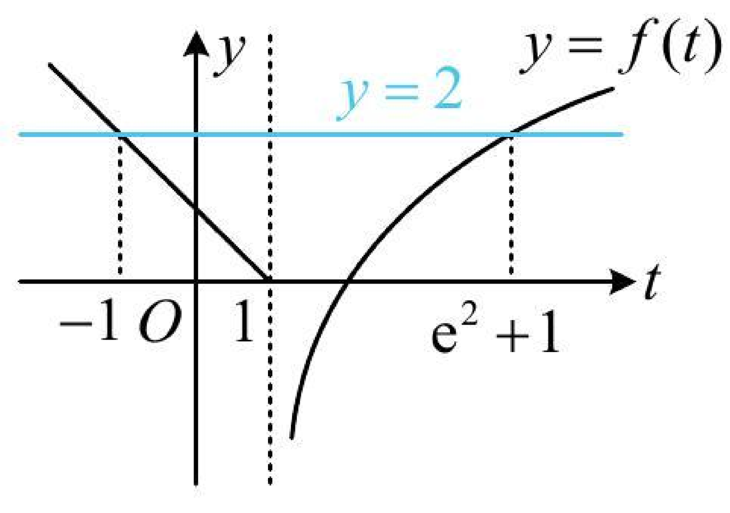


图1

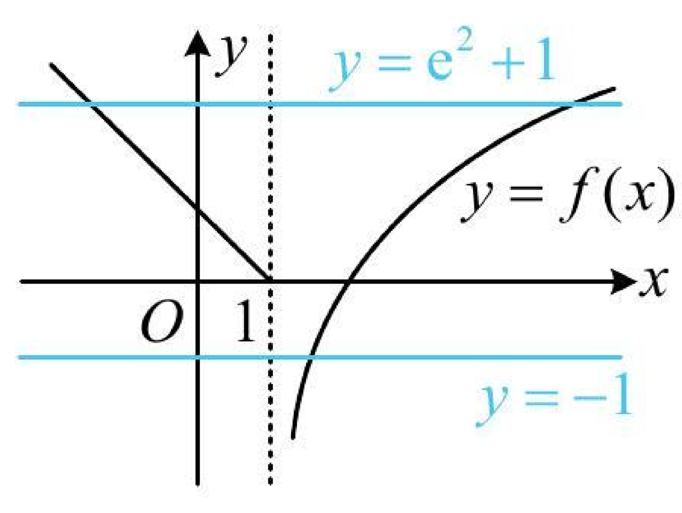


图2

【变式】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x},x>0\\ x^2+2x,x\le 0\end{cases}$，则函数 $y=f(f(x)+1)$ 的零点个数是（　　）

（A）2　（B）3　（C）4　（D）5

解析：$f(f(x)+1)$ 仍是双层结构，研究零点时可将内层换元成 t，先解 t，再解 x，

设 $t=f(x)+1$，则 $f(f(x)+1)=0$ 即为 $f(t)=0$，下面画图看 $f(t)=0$ 的解的情况，

当 $t>0$ 时，$f(t)=\ln t-\dfrac{1}{t}$，所以 $f'(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}>0$，故 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗，

因为 $f(1)=-1<0$，$f(2)=\ln 2-\dfrac{1}{2}>0$，所以 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点 t_0，且 $t_0\in(1,2)$，

又 $\lim\limits_{t\to 0^{+}} f(t)=-\infty$， $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)=+\infty$，所以函数 $y=f(t)$ 的大致图象如图 1，

由图可知 $f(t)=0$ 有 $t=-2$，0， t_0 三个解，下面将这三个解代回 $t=f(x)+1$ 再看 x 的解的个数，

所以 $-2=f(x)+1$ 或 $0=f(x)+1$ 或 $t_0=f(x)+1$，从而 $f(x)=-3$ 或 $f(x)=-1$ 或 $f(x)=t_0-1$，

故只需看直线 $y=-3$， $y=-1$， $y=t_0-1$ 和函数 $y=f(x)$ 的图象共有几个交点，

如图 2，上述三条水平的直线与函数 $y=f(x)$ 的图象共有 5 个交点，故选 D.

答案：D

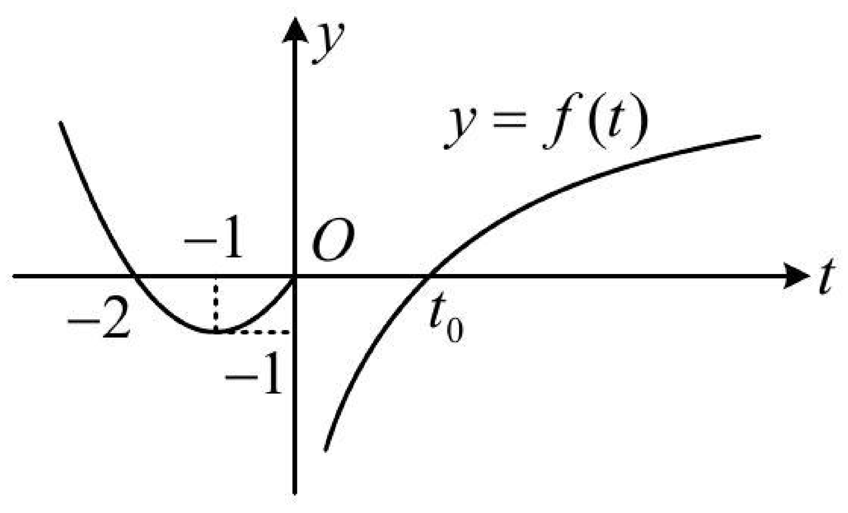


图1

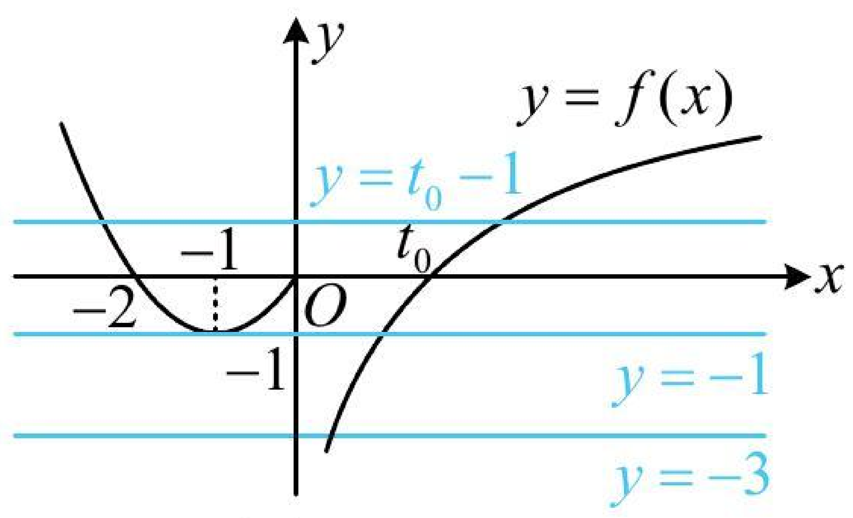


图2

【总结】研究 $y=f(g(x))$ 的零点，同样可类似例 1，设 $t=g(x)$，先由 $f(t)=0$ 求出 t，再代回 $t=g(x)$ 解 x.

类型Ⅱ：含参的复合函数方程问题

【例 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}|2^x-1|, x\le 2\\ 5-x, x>2\end{cases}$，若方程 $[f(x)]^2-(m+1)f(x)+m=0$ 有 5 个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为（　　）

（A）0　（B）$(0,1)$　（C）$[0,1)$　（D）$(1,3)$

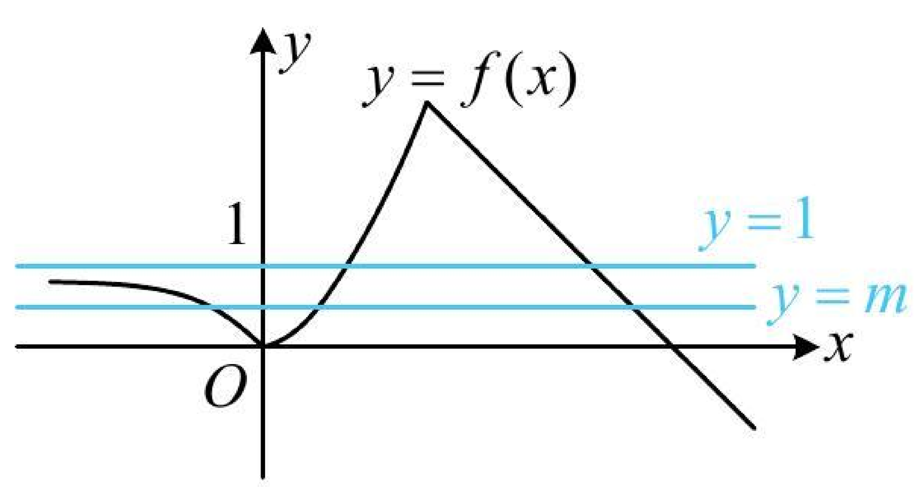
解析：将 $f(x)$ 看作一个整体，原方程可分解因式，

由题意，$[f(x)]^2-(m+1)f(x)+m=0 \Leftrightarrow [f(x)-1][f(x)-m]=0$，所以 $f(x)=1$ 或 $f(x)=m$，

原方程有 5 根等价于上述两个方程共有 5 根，即直线 $y=1$ 和 $y=m$ 与 $f(x)$ 的图象共有 5 个交点，

如图，直线 $y=1$ 与 $f(x)$ 的图象有 2 个交点，所以 $y=m$ 与 $f(x)$ 的图象应有 3 个交点，故 $0<m<1$.

答案：B



【反思】本题研究 5 根的组成方式是求解 m 范围关键，由于 $f(x)=1$ 有 2 根，所以 $f(x)=m$ 必有 3 根，从而据此求得 m 的取值范围.

【变式】已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, x>0\\ x^2, x\le 0\end{cases}$，若 $g(x)=f^2(x)+kf(x)+2$ 有 5 个零点，则实数 k 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-3)$　（B）$(-\infty,-3]$　（C）$(-\infty,-2\sqrt{3})$　（D）$(-3,-2\sqrt{2})$

解析： $g(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)+kf(x)+2=0$，此方程中含 x 的部分是 $f(x)$ 的整体结构，将其换元成 t，

设 $t=f(x)$，则 $t^2+kt+2=0$，此处不易分解因式，所以直接分析该方程根的分布情况，

函数 $t=f(x)$ 的大致图象如图 1，由图可知，当 t 变化时，方程 $t=f(x)$ 的解的个数可能为 0，2，3，

所以要使 $g(x)$ 有 5 个零点，方程 $t^2+kt+2=0$ 应有 2 个解 t_1，t_2，

且 $t_1=f(x)$ 和 $t_2=f(x)$ 分别有 3 个，2 个解，从而 $t_1\in(0,1)$，$t_2\in[1,+\infty)\cup\{0\}$，

而 0 不是方程 $t^2+kt+2=0$ 的解，所以只能 $t_1\in(0,1)$，$t_2\in[1,+\infty)$，

接下来就是一元二次方程根的分布问题了，可根据根的分布，画出对应的二次函数可能的图象，

二次函数 $\varphi(t)=t^2+kt+2$ 的大致图象只能如图 2 或图 3，

若为图 2，则 $\begin{cases}\varphi(0)=2>0\\ \varphi(1)=k+3<0\end{cases}$，解得：$k<-3$；若为图 3，则 $\varphi(1)=k+3=0$，解得：$k=-3$，

经检验，此时方程 $t^2+kt+2=0$ 的另一根为 2，所以不会出现图 3 所示的情形，故 $k=-3$ 不合题意；

综上所述，实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-3)$.

答案： A

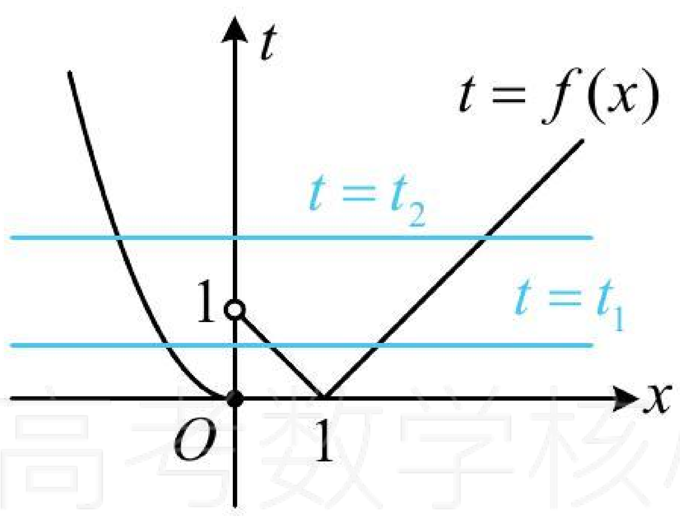


图1

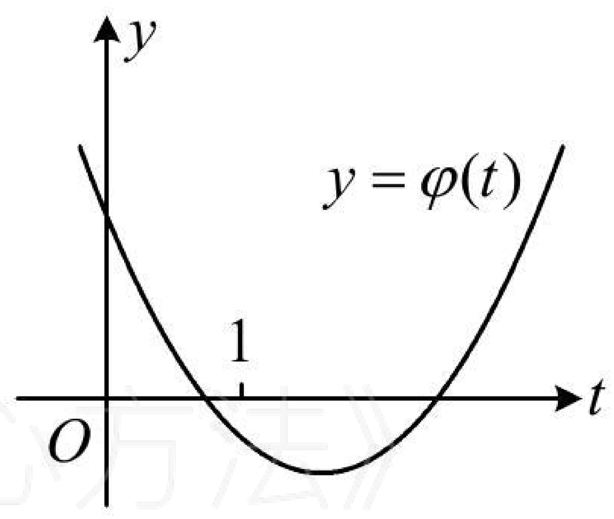


图2

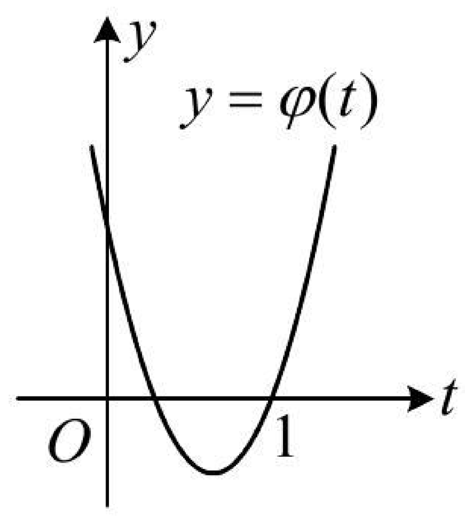


图3

【反思】与例 2 相比，本题的核心仍是基于研究 5 根的组成方式来求 m 的范围，不同之处在于令 $t=f(x)$ 后得到的方程 $t^2+kt+2=0$ 不好求解，故画图分析 $t=f(x)$ 可能的解的个数，进而发现 5 根的组成方式只能为 $2+3$.

【例 3】设函数 $f(x)=\begin{cases}x+4, x\le 0\\ (x-2)^2, x>0\end{cases}$，$g(x)=\dfrac{x}{e^x}$，若方程 $g(f(x))-k=0(k\in\mathbf{R})$ 有 4 个实根，则实数 k 的取值范围为_____.

解析： 设 $t=f(x)$，则 $g(f(x))-k=0$ 即为 $g(t)=k$，此方程无法直接解，可画图来看解的情况，

由题意，$g'(t)=\dfrac{1-t}{e^t}$，所以 $g'(t)>0\Leftrightarrow t<1$，$g'(t)<0\Leftrightarrow t>1$，故 $g(t)$ 在 $(-\infty,1)$ 上↗，在 $(1,+\infty)$ 上↘，

又 $g(1)=\dfrac{1}{e}$，$\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$，$\lim\limits_{t\to-\infty}g(t)=-\infty$，所以 $y=g(t)$ 的大致图象如图 1，

由图可知直线 $y=k$ 和 $y=g(t)$ 的图象的交点个数可能为 0，1，2，

那么交点个数为 0 或 1 行不行？为 0 则原方程无解，显然不行；为 1 呢？也不行！

因为 $t=f(x)$ 的大致图象如图 2，所以 1 条水平直线与该图象可产生 1，2，3 个交点，故原方程最多 3 根，

从而 $y=k$ 与 $y=g(t)$ 的图象必须有 2 个交点，即方程 $g(t)=k$ 有 2 根，所以 $0<k<\frac{1}{e}$，

由图 1 知此时的两根满足 $0<t_1<1<t_2$，现在我们来看看直线 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 与 $t=f(x)$ 图象的交点情况，

如图 2，$t=t_1$ 与 $t=f(x)$ 的图象必有 3 个交点，所以 $t=t_2$ 应与 $t=f(x)$ 的图象有 1 个交点，故 $t_2>4$，

怎样能使 $t_2>4$ 呢，又回到图 1 来看，注意到 $g(4)=\frac{4}{e^4}$，由图可知要使 $t_2>4$，只需 $0<k<\frac{4}{e^4}$.

答案：$(0,\frac{4}{e^4})$

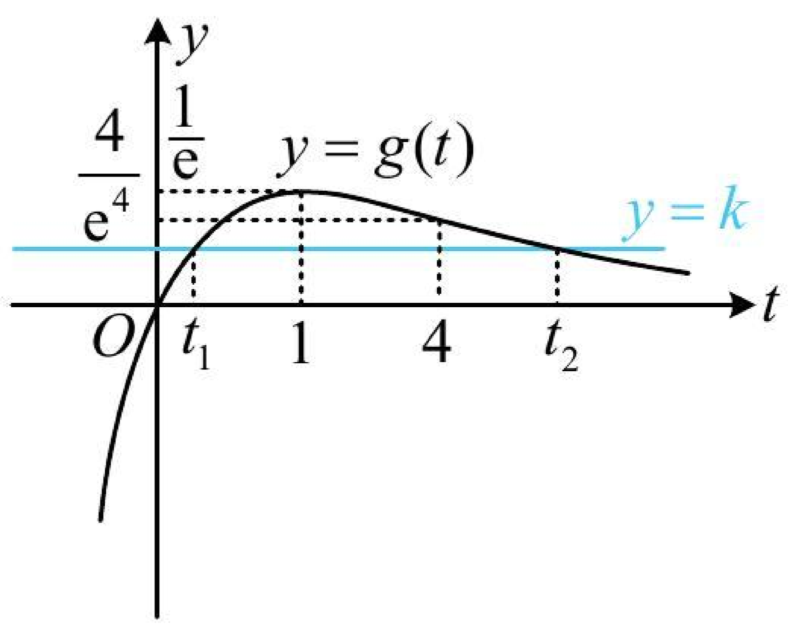


图1

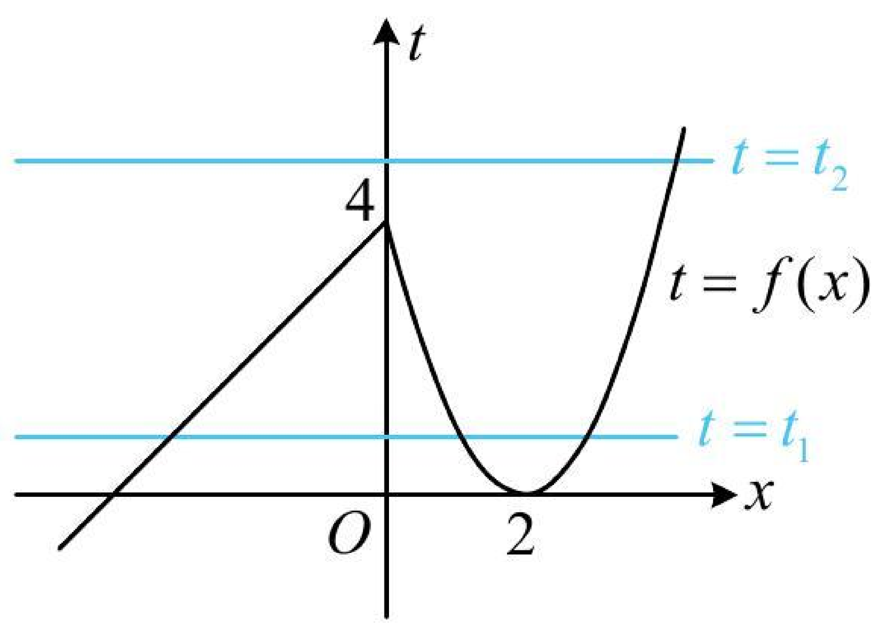


图2

【反思】本题令 $t=f(x)$ 后所得的方程 $g(t)-k=0$ 不再是一元二次方程，但是你看，解题的思路还是大同小异吧？先分析 $g(t)=k$ 的根的分布情况，再研究 $t=f(x)$ 的解的个数. 结合上面的几道题，相信你已摸清本节题型的思考流程.

强化训练

1.（2022 • 郑州期末 • ★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\le 0\\ \log_2 x,x>0\end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为_____.

2.（2022 •安徽期中 •★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{x},x<0\\ \ln x,x>0\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(f(x)+2)+2$ 的零点个数为（　　）

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

3．（2022·阆中期中·★★★）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+af(x)+a-1=0$ 仅有 1 个实数解，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-2\mathrm{e},1-\mathrm{e})$　　（B）$(1-\mathrm{e},1]\cup\{2\}$　　（C）$(1-\mathrm{e},1)$　　（D）$(1-\mathrm{e},2\mathrm{e})$

4．（★★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|,x>0\\-x^2-2x,x\le 0\end{cases}$，若函数 $y=2f^2(x)+1$ 与 $y=af(x)$ 的图象有 8 个交点，则实数 a 的取值范围为_____.

5．（★★★★）已知 $f(x)=\begin{cases}ax+1,x\le 0\\\log_2 x,x>0\end{cases}$，若函数 $y=f(f(x))+1$ 有 4 个零点，则实数 a 的取值范围为_____.

6．（★★★★）若关于 x 的方程 $2\mathrm{e}^{2x}=\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(a\in\mathbf{R})$ 有 4 个不同的实根，则 a 的取值范围为_____.